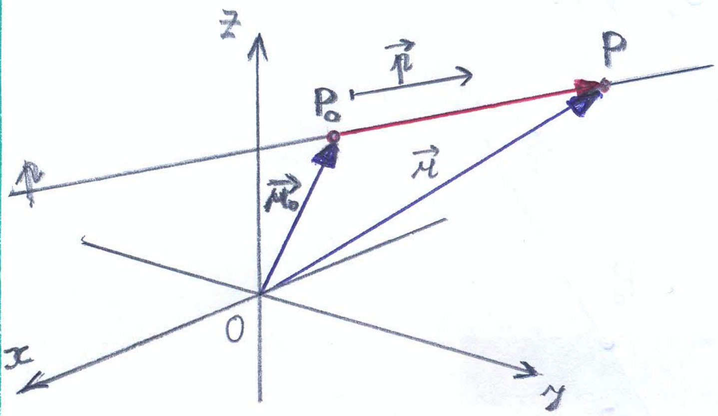
ПРАВА И РАВАН – предавања

А. Права



Дата је тачка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{p}\,(\ell, m, n)$. Кроз тачку P_0 паралелно вектору $\vec{p}$ може се повући само једна права p.

Нека је P произвољна тачка праве p. Координате тачке P су (x, y, z).

$\vec{r}_0$ – вектор положаја тачке P_0

$\vec{r}$ – вектор положаја тачке P

$\vec{r}_0 + \overrightarrow{P_0P} = \vec{r}$; одавде добијамо $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Са друге стране, вектори $\overrightarrow{P_0P}$ и $\vec{p}$ су колинеарни (паралелни), па је

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{p}, \quad \text{односно} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{p}}$$ – параметарска векторска једначина праве p

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + t\,(\ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}),$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + (t\ell)\vec{i} + (tm)\vec{j} + (tn)\vec{k},$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + t\ell)\vec{i} + (y_0 + tm)\vec{j} + (z_0 + tn)\vec{k}$$

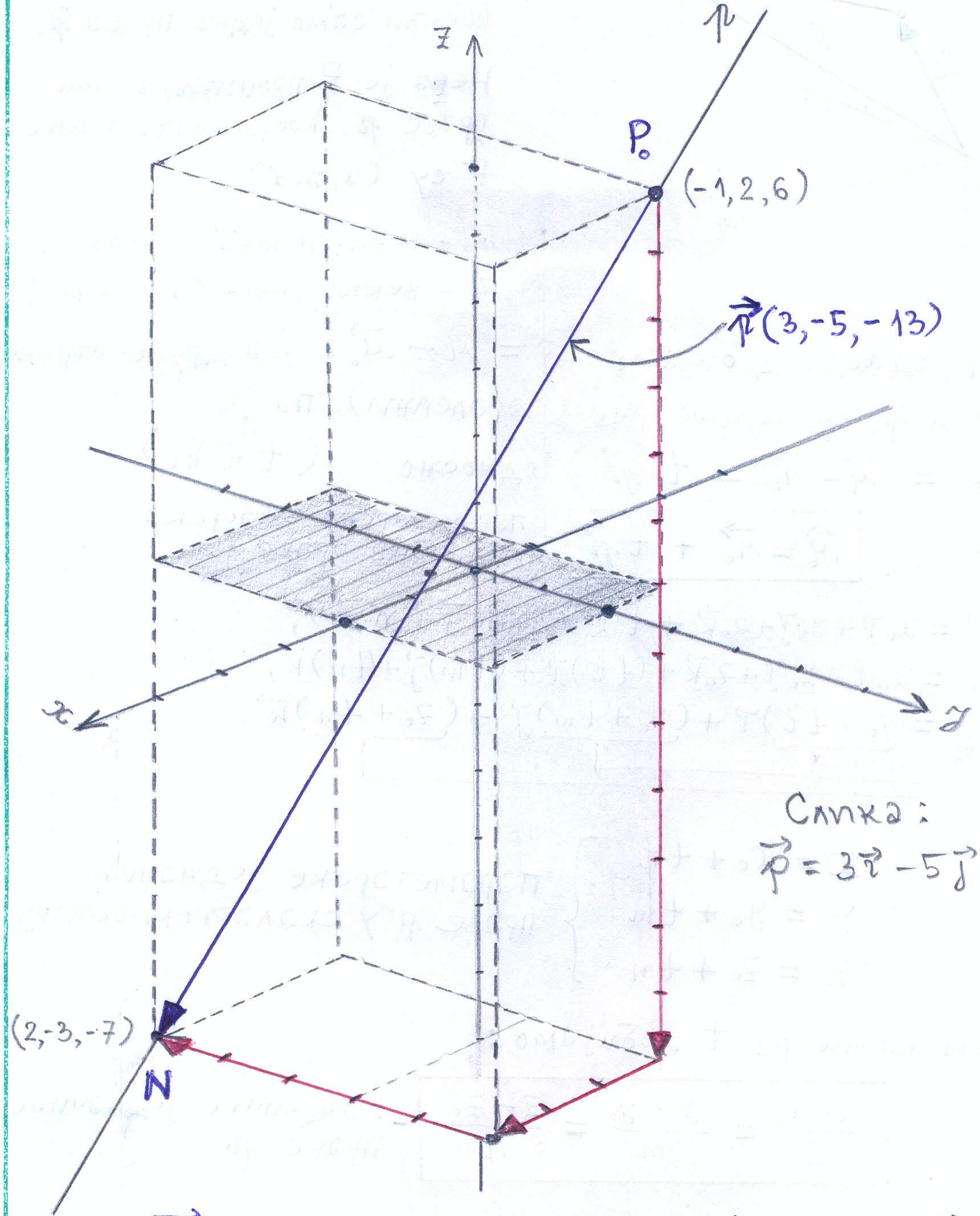
$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t\ell \\ y &= y_0 + tm \\ z &= z_0 + tn \end{aligned}\right\}$$ параметарске једначине праве p у скаларном облику

Елиминацијом параметра t добијамо:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}}$$ – каноничке једначине праве p

Вектор $\vec{p}$ зове се вектор правца праве p.

Пример. Наћи параметарске једначине праве која пролази кроз тачке $(-1,2,6)$ и $(2,-3,-7)$.



Слика:

$\vec{p} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 13\vec{k}$

Вектор $\overrightarrow{P_0N}$ одређује правац праве p. Ставићемо $\vec{p} = \overrightarrow{P_0N}$.

Вектор $\vec{p}$: почетак $(-1,2,6)$, крај $(2,-3,-7)$, $\vec{p} = (2-(-1), -3-2, -7-6)$

$\vec{p} = (3, -5, -13)$

$\quad\ \ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$\quad\ \ l \quad\ m \quad\ n$

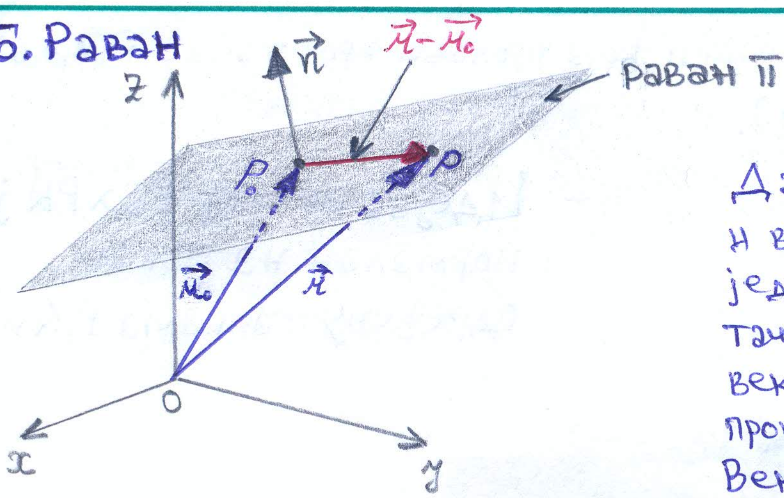
$P_0(-1, 2, 6)$

$\quad\ \ \downarrow \ \ \downarrow \ \ \downarrow$

$\quad\ \ x_0 \ y_0 \ z_0$

$$\left.\begin{aligned} x &= -1 + 3t \\ y &= 2 - 5t \\ z &= 6 - 13t \end{aligned}\right\}$$ – параметарске једначине праве p

Б. Раван



Дати су тачка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n}(A, B, C)$. Постоји једна раван која пролази кроз тачку P_0 и нормална је на вектор $\vec{n}$. Нека је $P(x, y, z)$ произвољна тачка равни π. Вектор $\overrightarrow{P_0P} = \vec{r} - \vec{r_0}$ припада равни π, па је онда нормалан на вектор $\vec{n}$.

$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0}$ - векторска једначина равни

$\vec{n}(A, B, C), \quad \vec{r} - \vec{r_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$ - скаларна једначина равни

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

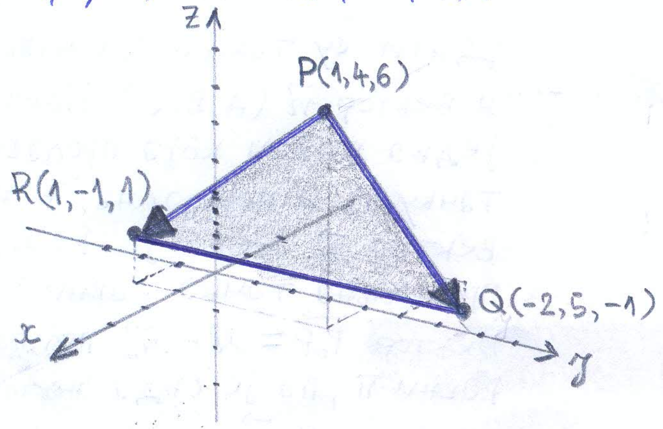
$$Ax + By + Cz \underbrace{- (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{D} = 0$$

$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$ - општа скаларна једначина равни

x, y и z су координате било које тачке равни π.

Координате тачака које припадају равни задовољавају једначину $Ax + By + Cz + D = 0$, док координате тачака које су ван равни ову једначину не задовољавају.

Пример: Наћи једначину равни која пролази кроз тачке $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ и $R(1,-1,1)$.



Идеја: вектор $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ је нормалан на раван одређену тачкама P, Q и R.

Вектор $\overrightarrow{PQ}$: $(-2-1,\ 5-4,\ -1-6) = (-3,\ 1,\ -7)$

$$\overrightarrow{PQ} = -3\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$$

Вектор $\overrightarrow{PR}$: $(1-1,\ -1-4,\ 1-6) = (0,\ -5,\ -5)$

$$\overrightarrow{PR} = -5\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}\vec{i} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5-35)\vec{i} - (15-0)\vec{j} + (15-0)\vec{k} = -40\vec{i} - 15\vec{j} + 15\vec{k}.$$

$$\vec{n} = (\underset{A}{\underset{\downarrow}{-40}},\ \underset{B}{\underset{\downarrow}{-15}},\ \underset{C}{\underset{\downarrow}{15}}) \qquad (\underset{x_0}{\underset{\downarrow}{1}},\underset{y_0}{\underset{\downarrow}{4}},\underset{z_0}{\underset{\downarrow}{6}}) \leftarrow \text{тачка } P$$

Једначина равни: $-40(x-1) - 15(y-4) + 15(z-6) = 0$

$$-40x + 40 - 15y + 60 + 15z - 90 = 0$$

$$-40x - 15y + 15z + 10 = 0 \quad /:(+5)$$

$$-8x - 3y + 3z + 2 = 0$$

$$\boxed{-8x - 3y + 3z = -2}$$

До истог резултата бисмо дошли да смо уместо **координата** тачке P користили **координате тачке** Q или R.

В. Узајамни однос праве и равни

Нека су раван π и права p дате са

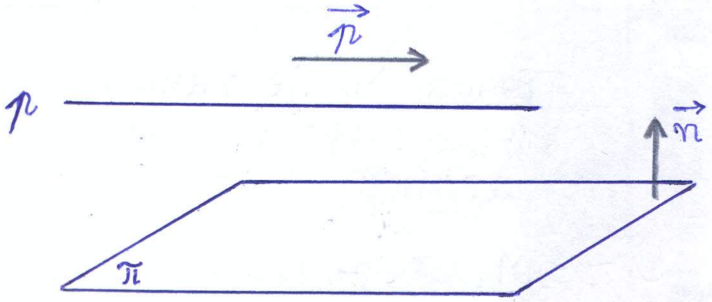
$$\pi : \; Ax + By + Cz + D = 0$$

$$p : \; \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \, .$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ је нормалан на раван π, док је вектор $\vec{p} = (l, m, n)$ вектор правца праве p. Такође, тачка (x_0, y_0, z_0) припада правој p.

Размотрићемо следеће случајеве.

1. Права и раван су паралелне

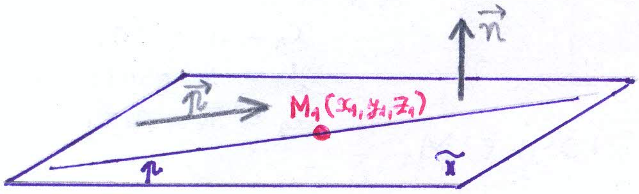


Вектори $\vec{n}$ и $\vec{p}$ су међусобно нормални, па је њихов скаларни производ једнак нули.

Услов паралелности праве и равни: $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$

2. Права лежи у равни

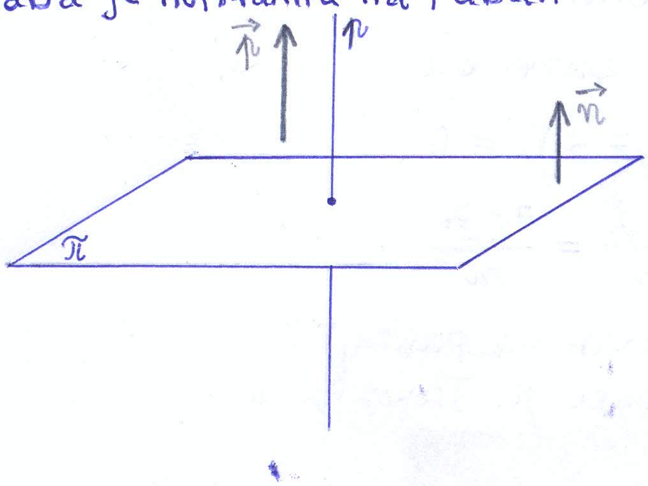
$M_1(x_1, y_1, z_1)$ је тачка која припада правој p



Када права лежи у равни, онда је она и паралелна са том равни, па важи: $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$.
Тачка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ праве p уједно припада и равни π, тј. координате тачке M_1 задовољавају једначину равни π.
Имамо: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

Услов да права лежи у равни: $\vec{n} \cdot \vec{p} = 0$
$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

3. Права је нормална на раван



Вектори $\vec{p}$ и $\vec{n}$ су паралелни ($\vec{p} \parallel \vec{n}$).

$\vec{n} = \lambda \vec{p}$ (λ је неки број)

$(A, B, C) = \lambda(l, m, n)$

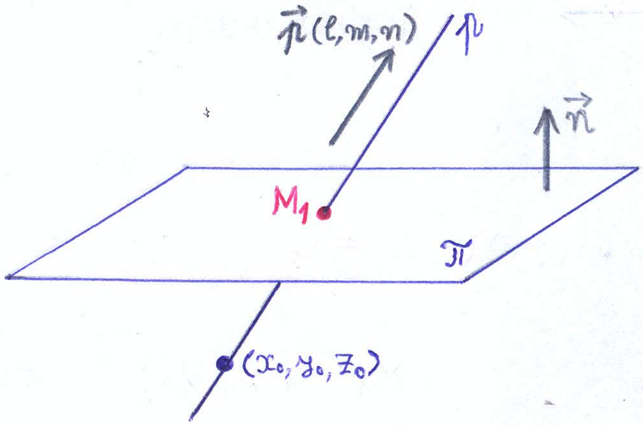
$(A, B, C) = (\lambda l, \lambda m, \lambda n)$

$A = \lambda l, \; B = \lambda m, \; C = \lambda n$

$$\lambda = \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

Услов нормалности праве и равни: $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$

4. Права продире раван



Тачка M_1 је тачка продора праве p кроз раван π.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

Параметарске једначине праве p у скаларном облику:
$x = x_0 + lt, \; y = y_0 + mt, \; z = z_0 + nt.$

Пошто тачка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ припада правој p, онда постоји број t_1 тако да је:

$$x_1 = x_0 + lt_1$$
$$y_1 = y_0 + mt_1$$
$$z_1 = z_0 + nt_1$$

Да бисмо одредили координате тачке M_1 потребно је да нађемо t_1.

t_1 одређујемо на следећи начин: тачка M_1 припада и равни π, па координате тачке M_1 задовољавају и једначину равни π.

$$\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$$

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \longrightarrow A(x_0 + lt_1) + B(y_0 + mt_1) + C(z_0 + nt_1) + D = 0$

$Ax_0 + t_1 Al + By_0 + t_1 Bm + Cz_0 + t_1 Cn + D = 0$

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t_1(Al + Bm + Cn) = 0 \leftarrow$ Из ове једначине одређујемо t_1

Напомена: Случај 3 (кад је права нормална на раван) је специјалан случај случаја 4. Овде описаним поступком можемо одредити тачку продора праве кроз раван и кад је та права нормална на раван.

Пример:

Доказати да је права $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ паралелна с равни $\pi: 2x+y-z=0$.

Вектор $\vec{p}=(2,-1,3)$ је вектор правца праве p. Вектор $\vec{n}=(2,1,-1)$ је нормалан на раван π.

Како је $\vec{n}\cdot\vec{p}=(2,1,-1)\cdot(2,-1,3)=2\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3=0$, онда закључујемо да је права p паралелна с равни π.

Из $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ добијамо $x+1=2t$, $y+1=-t$, $z-3=3t$, односно $x=-1+2t$, $y=-1-t$, $z=3+3t$. За $t=0$ добијамо да тачка $A(-1,-1,3)$ припада правој p. Да ли тачка A припада равни π? Како је $2(-1)+(-1)-3=-6\neq 0$, закључујемо да координате тачке A не задовољавају једначину равни π, односно тачка A не припада равни π. Дакле, права p је паралелна с равни π, али не лежи у равни π.

Пример:

Доказати да права $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежи у равни $\alpha: 2x+y-z=0$.

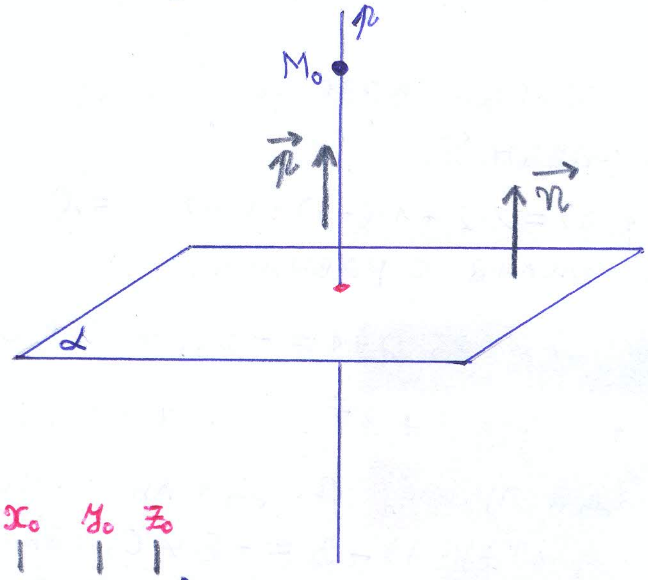
Вектор $\vec{p}=(2,-1,3)$ је вектор правца праве p.

Вектор $\vec{n}=(2,1,-1)$ је нормалан на раван α.

Из $\vec{n}\cdot\vec{p}=(2,1,-1)\cdot(2,-1,3)=2\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 3=0$ следи да је права p паралелна са равни α.

Параметарске једначине праве p у скаларном облику изгледају овако: $x=-1+2t$, $y=-1-t$, $z=-3+3t$. Ако ставимо $t=0$, онда видимо да тачка $M(-1,-1,-3)$ припада правој p. Са друге стране, $2(-1)+(-1)-(-3)=0$, тј. координате тачке M задовољавају једначину равни α – то значи да тачка M припада равни α. То значи да права p лежи у равни α.

Пример: Наћи једначину праве која пролази кроз тачку $M_0(-2,1,1)$ и нормална је на раван $x-2y-z-2=0$.



Да би права p била нормална на раван α треба да важи $\vec{p}\parallel\vec{n}$.

Најлакше је узети $\vec{p}=\vec{n}$.

Вектор правца праве p једнак је вектору $\vec{n}$ који је нормалан на раван α.

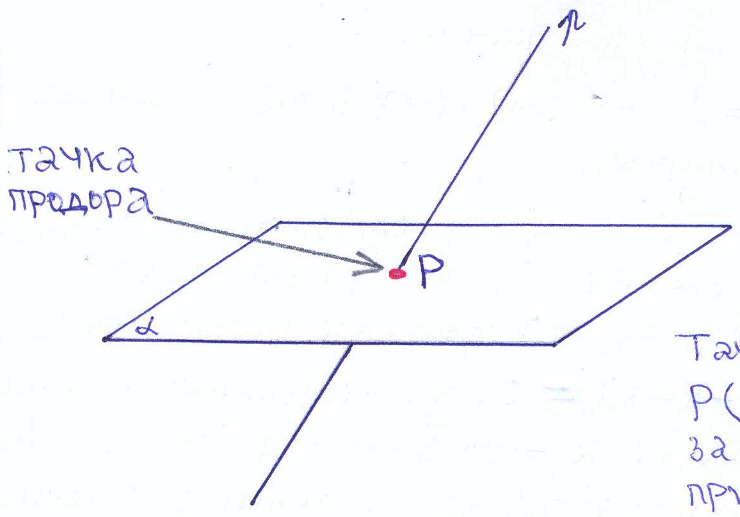
$$\vec{n}=(1,-2,-1)\rightarrow\vec{p}=(\underset{l}{1},\underset{m}{-2},\underset{n}{-1})$$

$$M_0(\overset{x_0}{-2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{1})$$

Једначина праве p: $\dfrac{x-(-2)}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$, односно

$$p:\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}.$$

Пример: Наћи продор праве $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$ кроз раван $x-2y+z+5=0$.



$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}=t$$

$x-1=t\rightarrow x=1+t$

$y=2t$

$z+1=t\rightarrow z=-1+t$

Параметарске једначине праве у скаларном облику: $x=1+t,\ y=2t,\ z=-1+t$

Тачка продора P има координате $P(1+t_1,\ 2t_1,\ -1+t_1)$, где је t_1 за сада непознати број. Тачка P припада равни, па њене координате задовољавају једначину равни.

$1+t_1-2(2t_1)+(-1+t_1)+5=0$

$1+t_1-4t_1-1+t_1+5=0$

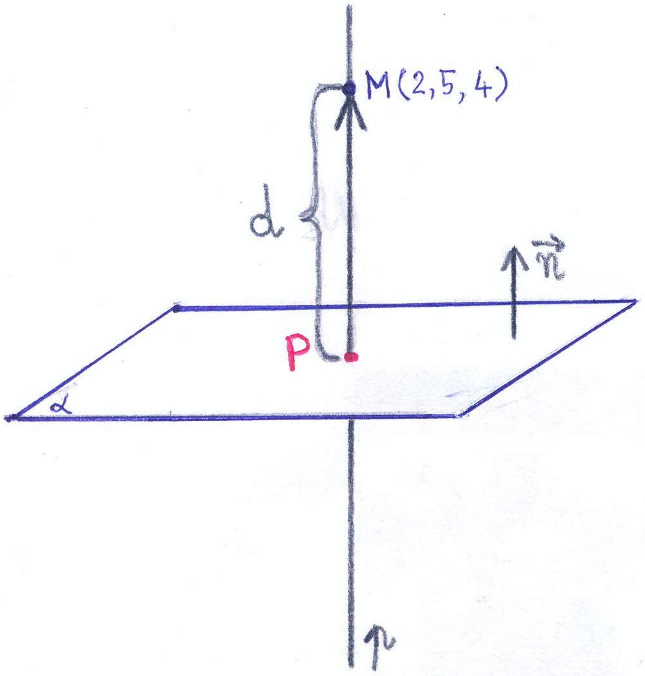
$-2t_1+5=0,\ 2t_1=5$

$t_1=\dfrac{5}{2}$

$$P\left(1+\frac{5}{2},\ 2\cdot\frac{5}{2},\ -1+\frac{5}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{7}{2},\ 5,\ \frac{3}{2}\right)$$

Пример: Наћи растојање тачке $(2,5,4)$ од равни $x+2y+2z-2=0$.



Поступак:

1° Наћи једначину праве p која је нормална на раван α;

2° Наћи тачку продора P праве p кроз раван α;

3° Растојање d тачке M од равни α је једнако интензитету вектора $\overrightarrow{PM}$, тј. $d=|\overrightarrow{PM}|$.

1° Вектор правца праве p једнак је вектору нормале на раван α, тј. $\vec{p}=\vec{n}=(1,2,2)$. Каноничке једначине праве p:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{2}.$$

2° Параметарске једначине праве p у скаларном облику:

$\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z-4}{2}=t \rightarrow x-2=t,\ y-5=2t,\ z-4=2t,$

$x=2+t,\ y=5+2t,\ z=4+2t$. Тачка P има координате $P(2+t_1, 5+2t_1, 4+2t_1)$, где је t_1 неки број. Тачка P припада такође и равни α:

$2+t_1+2(5+2t_1)+2(4+2t_1)-2=0,\quad 2+t_1+10+4t_1+8+4t_1-2=0$

$18+9t_1=0,\ 9t_1=-18,\ t_1=-2;\quad P(0,1,0).$

3° Нађимо координате вектора $\overrightarrow{PM}$ (тачка M је крај вектора, тачка P је његов почетак).

$\overrightarrow{PM}=(2-0,\ 5-1,\ 4-0)=(2,4,4)$

Растојање тачке од равни: $d=|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}$,

$d=\sqrt{36}=6.$

Растојање тачке $(2,5,4)$ од равни $x+2y+2z-2=0$ износи 6.